

多項式解題三步曲

1

- 利用餘式/因式定理(及聯立方程)解未知值, 或
- 比較同類項
- 透過除數/商式/餘式建立多項式

2

- 利用因式，透過長除法將較高次的多項式變成二次

3

- 利用因式分解/ 二次方程求根
- 利用判別式了解根的性質(不是實數/無理根..)

DSE2015

11. 設 $f(x) = (x-2)^2(x+h) + k$ ，其中 h 及 k 均為常數。當 $f(x)$ 除以 $x-2$ 時，餘數為 -5 。已知 $f(x)$ 可被 $x-3$ 整除。

(a) 求 h 及 k 。 (3 分)

(b) 某人宣稱方程 $f(x) = 0$ 所有的根均為整數。你是否同意？試解釋你的答案。 (3 分)

14' 設 $f(x) = 4x^3 - 5x^2 - 18x + c$ ，其中 c 為一常數。當 $f(x)$ 除以 $x-2$ 時，餘數為 -33 。

(a) $x+1$ 是否 $f(x)$ 的因式？試解釋你的答案。

(b) 某人宣稱方程 $f(x) = 0$ 所有的根均為有理數。你是否同意？試解釋你的答案。

Dse2018

12. 設 $f(x) = 4x(x+1)^2 + ax + b$ ，其中 a 及 b 均為常數。已知 $x-3$ 為 $f(x)$ 的因式。當 $f(x)$ 除以 $x+2$ 時，餘數為 $2b+165$ 。

(a) 求 a 及 b 。 (3 分)

(b) 某人宣稱方程 $f(x) = 0$ 有至少一個無理根。你是否同意？試解釋你的答案。 (4 分)

11. (a) $k = -5$
 $f(3) = 0$
 $(3-2)^2(3+h) - 5 = 0$
 $h = 2$

(b) $f(x) = 0$
 $(x-2)(x-2)(x+2) - 5 = 0$
 $x^3 - 2x^2 - 4x + 3 = 0$
 $(x-3)(x^2 + x - 1) = 0$
 $x = 3$ or $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Note that both $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ and $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ are not integers.

Thus, the claim is disagreed.

1A
1M

1A

----- (3)

1A
1M

1A

----- (3)

DSE 2014

7. (a) $f(2) = -33$
 $4(2)^3 - 5(2)^2 - 18(2) + c = -33$
 $c = -9$

$f(-1)$
 $= 4(-1)^3 - 5(-1)^2 - 18(-1) - 9$
 $= 0$

Thus, $x+1$ is a factor of $f(x)$.

(b) $f(x) = 0$
 $4x^3 - 5x^2 - 18x - 9 = 0$
 $(x+1)(4x^2 - 9x - 9) = 0$
 $(x+1)(x-3)(4x+3) = 0$

$x = -1$, $x = 3$ or $x = \frac{-3}{4}$

Note that -1 , 3 and $\frac{-3}{4}$ are rational numbers.

Thus, the claim is agreed.

1M

1M

1A

1M

1A

----- (5)

12. (a) $f(3) = 0$

$$4(3)(3+1)^2 + a(3) + b = 0$$

$$3a + b = -192$$

$$f(-2) = 2b + 165$$

$$4(-2)(-2+1)^2 + a(-2) + b = 2b + 165$$

$$2a + b = -173$$

求解後，可得 $a = -19$ 及 $b = -135$ 。

(b) $f(x) = 0$

$$4x(x+1)^2 - 19x - 135 = 0$$

$$4x^3 + 8x^2 - 19x - 135 = 0$$

$$(x-3)(4x^2 + 20x + 45) = 0$$

$$x = 3 \text{ 或 } 4x^2 + 20x + 45 = 0$$

$$20^2 - 4(4)(45)$$

$$= -320$$

$$< 0$$

故此，方程 $4x^2 + 20x + 45 = 0$ 沒有實根。

留意 3 不是無理數。

因此，不同意該宣稱。

1M

1M

1A

----- (3)

1M

1M

1M

1A

----- (4)

13' 設 $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + kx - 8$ ，其中 k 為一常數。已知 $f(x) \equiv (x - 2)(ax^2 + bx + c)$ ，其中 a 、 b 及 c 均為常數。

(a) 求 a 、 b 及 c 。(4 分)

(b) 某人宣稱方程 $f(x) = 0$ 所有的根均為實數。你是否同意？試解釋你的答案。(3 分)

14. 設 $p(x) = 6x^4 + 7x^3 + ax^2 + bx + c$ ，其中 a 、 b 及 c 均為常數。當 $p(x)$ 除以 $x+2$ 時及當 $p(x)$ 除以 $x-2$ 時，所得的兩餘數相等。已知 $p(x) \equiv (lx^2 + 5x + 8)(2x^2 + mx + n)$ ，其中 l 、 m 及 n 均為常數。

(a) 求 l 、 m 及 n 。 (5 分)

(b) 方程 $p(x) = 0$ 有多少個實根？試解釋你的答案。 (5 分)

12. (a) 藉比較 x^3 的係數及常數項，可得 $a=3$ 及 $c=4$ 。 留意在 $(x-2)(3x^2+bx+4)$ 的展開式中 x^2 的係數為 $b-6$ 。 藉比較 x^2 的係數，可得 $b-6=-7$ 。 因此，可得 $b=-1$ 。	1A+1A 1M 1A
留意 $x-2$ 為 $f(x)$ 的因式。 $f(2)=0$ $3(2)^3-7(2)^2+2k-8=0$ $k=6$ $f(x)$ $=3x^3-7x^2+6x-8$ $=(x-2)(3x^2-x+4)$ 因此，可得 $a=3$ 、 $b=-1$ 及 $c=4$ 。	1M 1A+1A+1A (4)
(b) Δ $=(-1)^2-4(3)(4)$ $=-47$ <0 故此，方程 $3x^2-x+4=0$ 有非實數根。 因此，不同意該宣稱。	1M 1M+1A (3)

14. (a) 留意 $p(2)=152+4a+2b+c$ 及 $p(-2)=40+4a-2b+c$ 。 由於 $p(2)=p(-2)$ ，可得 $b=-28$ 。 藉比較 x^4 的係數，可得 $l=3$ 。 留意在 $(3x^2+5x+8)(2x^2+mx+n)$ 的展開式中 x^3 及 x 的係數分別為 $3m+10$ 及 $8m+5n$ 。 故此，可得 $3m+10=7$ 及 $8m+5n=-28$ 。 求解後，可得 $m=-1$ 及 $n=-4$ 。	1M 1A 1M 1A+1A (5)
(b) $p(x)=0$ $(3x^2+5x+8)(2x^2-x-4)=0$ (藉 (a)) $3x^2+5x+8=0$ 或 $2x^2-x-4=0$ $5^2-4(3)(8)$ $=-71$ <0 故此，二次方程 $3x^2+5x+8=0$ 沒有實根。 $(-1)^2-4(2)(-4)$ $=33$ >0 所以，二次方程 $2x^2-x-4=0$ 有 2 個實根。 由此，方程 $(3x^2+5x+8)(2x^2-x-4)=0$ 有 2 個實根。 因此，方程 $p(x)=0$ 有 2 個實根。	1M 1A 1M+1A 1A (5) 必

14. 設 $f(x) = 6x^3 - 13x^2 - 46x + 34$ 。當 $f(x)$ 除以 $2x^2 + ax + 4$ 時，商式及餘式分別為 $3x + 7$ 及 $bx + c$ ，其中 a 、 b 及 c 均為常數。

(a) 求 a 。 (3分)

(b) 設 $g(x)$ 為二次多項式使得當 $g(x)$ 除以 $2x^2 + ax + 4$ 時，餘式為 $bx + c$ 。

(i) 證明 $f(x) - g(x)$ 可被 $2x^2 + ax + 4$ 整除。

(ii) 某人宣稱方程 $f(x) - g(x) = 0$ 所有的根均為整數。你是否同意？試解釋你的答案。

(5分)

11. 設 $p(x)$ 為三次多項式。當 $p(x)$ 除以 $x-1$ 時，餘數為 50。當 $p(x)$ 除以 $x+2$ 時，餘數為 -52。已知 $p(x)$ 可被 $2x^2+9x+14$ 整除。

(a) 求當 $p(x)$ 除以 $2x^2+9x+14$ 時的商式。 (3 分)

(b) 方程 $p(x)=0$ 有多少個有理根？試解釋你的答案。 (3 分)

14. (a) 留意 $f(x) = (2x^2 + ax + 4)(3x + 7) + bx + c$ 。
 由此，可得 $f(x) = 6x^3 + 3ax^2 + 12x + 14x^2 + 7ax + 28 + bx + c$ 。
 再者留意 $f(x) = 6x^3 - 13x^2 - 46x + 34$ 。
 所以，可得 $3a + 14 = -13$ 。
 求解後，可得 $a = -9$ 。

1M

1M

1A

----- (3)

- (b) (i) 設 $g(x) = k(2x^2 + ax + 4) + bx + c$ ，其中 k 為一常數。

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= (2x^2 + ax + 4)(3x + 7) - k(2x^2 + ax + 4) \\ &= (2x^2 + ax + 4)(3x + 7 - k) \end{aligned}$$

1M

因此， $f(x) - g(x)$ 可被 $2x^2 + ax + 4$ 整除。

1

- (ii) $f(x) - g(x) = 0$

$$(2x^2 - 9x + 4)(3x + 7 - k) = 0 \quad (\text{藉 (a) 及 (b)(i)})$$

1M

$$(2x - 1)(x - 4)(3x + 7 - k) = 0$$

1M

留意 $\frac{1}{2}$ 為以上方程的根。

故此，方程 $f(x) - g(x) = 0$ 不是所有的根均為整數。

因此，不同意該宣稱。

1A

----- (5)

11. (a) Let $ax + b$ be the required quotient, where a and b are constants.

1M

Then, we have $p(x) = (ax + b)(2x^2 + 9x + 14)$.

Note that $p(1) = 50$ and $p(-2) = -52$.

1M

Hence, we have $(a(1) + b)(2(1)^2 + 9(1) + 14) = 50$ and

$$(a(-2) + b)(2(-2)^2 + 9(-2) + 14) = -52.$$

So, we have $a + b = 2$ and $-2a + b = -13$.

Solving, we have $a = 5$ and $b = -3$.

1A

Thus, the required quotient is $5x - 3$.

----- (3)

- (b) $p(x) = 0$

$$(5x - 3)(2x^2 + 9x + 14) = 0 \quad (\text{by (a)})$$

$$5x - 3 = 0 \text{ or } 2x^2 + 9x + 14 = 0$$

$$9^2 - 4(2)(14)$$

1M

$$= -31$$

$$< 0$$

So, the quadratic equation $2x^2 + 9x + 14 = 0$ does not have real roots.

1M

Note that $\frac{3}{5}$ is a rational root of $p(x) = 0$.

Thus, the equation $p(x) = 0$ has 1 rational root.

1A

----- (3)

10. (a) 求當 $5x^3 + 12x^2 - 9x - 7$ 除以 $x^2 + 2x - 3$ 時的商式。 (2分)
- (b) 設 $g(x) = (5x^3 + 12x^2 - 9x - 7) - (ax + b)$ ，其中 a 及 b 均為常數。已知 $g(x)$ 可被 $x^2 + 2x - 3$ 整除。
- (i) 寫出 a 及 b 的值。
- (ii) 解方程 $g(x) = 0$ 。
- (4分)

CE 2011

13. (a) 求 k 的值使得 $x - 2$ 為 $kx^3 - 21x^2 + 24x - 4$ 的因式。 (2分)
- (b) 圖 4 顯示 $y = 15x^2 - 63x + 72$ 的圖像。 Q 為第一象限內圖像上的可變點。 P 及 R 分別為由 Q 至 x 軸及 y 軸的垂足。

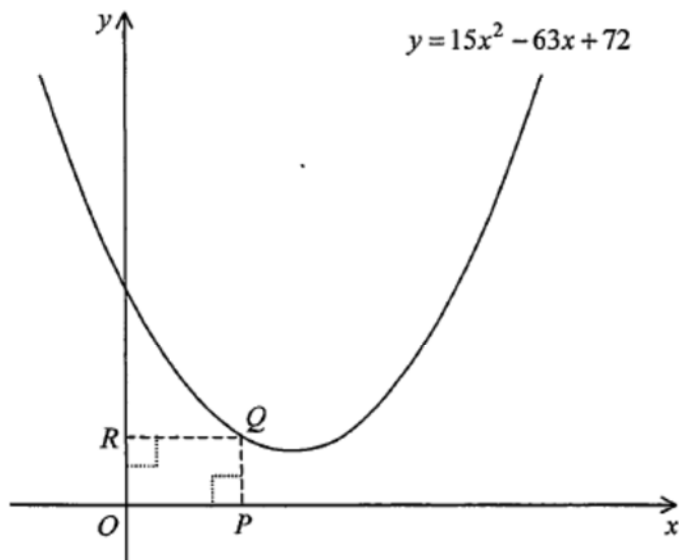


圖 4

- (i) 設 $(m, 0)$ 為 P 的坐標。以 m 表長方形 $OPQR$ 的面積。
- (ii) Q 是否有三個不同的位置使得長方形 $OPQR$ 的面積為 12？試解釋你的答案。

(5分)

