S4 續多項式- 利用餘式定理找出多項式未知數

例子：考慮多項式 $x^3 + 7x^2 + mx + n$ ，其中 m 和 n 都是常數。當該多項式除以 $x + 1$ 時，所得的餘數是 -4 。當該多項式除以 $x + 2$ 時，所得的餘數是 -3 。求 m 和 n 的值。

考慮多項式 $x^3 + mx^2 + n$ ，其中 m 和 n 都是常數。當該多項式除以 $x + 1$ 時，所得的餘數是 2 。當該多項式除以 $x - 2$ 時，所得的餘數是 -1 。求 m 和 n 的值。

解

$$\text{設 } f(x) = x^3 + mx^2 + n。$$

當 $f(x)$ 除以 $x + 1$ 時，餘數是 2 。

根據餘式定理，

$$\text{餘數} = f(-1)$$

$$2 = (-1)^3 + m(-1)^2 + n$$

$$2 = -1 + m + n$$

$$m + n = 3 \dots\dots\dots (1)$$

當 $f(x)$ 除以 $x - 2$ 時，餘數是 -1 。

根據餘式定理，

$$\text{餘數} = f(2)$$

$$-1 = 2^3 + m(2)^2 + n$$

$$-1 = 8 + 4m + n$$

$$4m + n = -9 \dots\dots\dots (2)$$

解 (1) 和 (2)，

$$m = -4 \text{ 和 } n = 7。$$

當多項式 $x^3 - x^2 + mx + n$ 除以 $x + 1$ 時，所得的餘數是 -1 。當該多項式除以 $x + 2$ 時，所得的餘數是 -14 。求 m 和 n 的值。

習題

1. 當 $x^3 + kx^2 + 2x - 3$ 除以 $x - 1$ 時，所得的餘數是 2。求 k 的值。

2. 當 $2x^3 + kx^2 - 3x + 9$ 除以 $x + 2$ 時，所得的餘數是 -5 。求 k 的值。

3. 當 $x^3 + 3x^2 - 2x + k$ 除以 $x + 4$ 時，所得的餘數是 -9 。求 k 的值。

4. 當 $3x^3 - 2x^2 + kx - 60$ 除以 $x - 3$ 時，所得的餘數是 6。求 k 的值。

5. 當多項式 $x^3 - x^2 + mx + n$ 除以 $x + 1$ 時，所得的餘數是 -1 。當該多項式除以 $x + 2$ 時，所得的餘數是 -14 。求 m 和 n 的值。

6. 當多項式 $3x^3 - 2x^2 + mx + n$ 除以 $x - 2$ 時，所得的餘數是 24 。當該多項式除以 $x - 1$ 時，所得的餘數是 4 。求 m 和 n 的值。

7. 多項式 $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - px + q$ 可被 $x - 1$ 整除，其中 p 和 q 都是常數。當 $f(x)$ 除以 $x + 1$ 時，所得的餘數是 4 。

(a) 求 p 和 q 的值。

(b) 由此，把 $f(x)$ 因式分解。

8.

設 $f(x) = (x-2)^2(x+h) + k$ ，其中 h 及 k 均為常數。當 $f(x)$ 除以 $x-2$ 時，餘數為 -5 。已知 $f(x)$ 可被 $x-3$ 整除。

(a) 求 h 及 k 。 (3分)

(b) 某人宣稱方程 $f(x) = 0$ 所有的根均為整數。你是否同意？試解釋你的答案。 (3分)