伯裘書院
2019-2020 年度
中五級數學科

第十三章：等差數列及等比數列的求和法

13.1. 等差數列的求和法

等差數列的通項 **T(n)** (其中 a 為首項, d 為公差)	$T(n) = a + (n-1)d$

等差數列的首 n 項之和 **S(n)** (其中l為末項/第 n 項) ($l = a + (n-1)d$)	$S(n) = \frac{(首項+末項)\times項數}{2}$ $S(n) = \frac{(a+l)\times n}{2}$ ***或*** $S(n) = \frac{n}{2}[a + a + (n-1)d]$ $= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

Ex. 13.1

例	下列等差數列共有 8 項，求各數列所有項之和。 等差數列: 4, 7, 10, … , 25 **解** 首項 a = 4 末項 l = 25 項數 n = 8 首 8 項之和 S(8) : $\frac{(a+l)\times n}{2}$ $= \frac{(4+25)8}{2}$ = 116
1.	下列等差數列共有 8 項，求各數列所有項之和。 等差數列: 6, 10, 14, … , 34 ANS: 160

例	根據所提供的資料，求等差數列首 n 項之和。當 $a = 7, d = 2, n = 8$。 **解** 公差 d = 2 首項 a = 7 末項 l = T(8) = a + (n – 1)d = 7 + (8 – 1) 2 = 21 首 8 項之和 S(8) : $\frac{(a+l)\times n}{2}$ $= \frac{(7+21)8}{2}$ = 112
2.	根據所提供的資料，求等差數列首 n 項之和。當 $a = -9, d = 3, n = 10$。 ANS: 45
3.	下列等差數列中，求首 10 項之和。 11, 16, 21, … **解** 公差 d = 首項 a = 末項 l = T(10) = a + (n – 1)d = 首 8 項之和 S(8) : $S(n) = \frac{(a+l)\times n}{2}$ ANS: 335

4.	下列等差數列中，求首 10 項之和。 –3, –7, –11, … ANS: -210
5.	已知等差數列 45, 37, 29, … , –43。 **(a)** 求該數列共有多少項？ **(b)** 求該數列所有項之和。 **<u>解</u>** **(a)** 首項 a = 公差 d = 設該數列共有 k 項。 ∴ $T(k) = -43$ T(n) = a + (n - 1) d **(b)** ANS: (a) 12, (b) 12
6.	一等差數列的第 n 項為 $4n + 7$。求該數列的首 13 項之和。 **<u>解</u>** 第 1 項: ____________ (當 n = 1) 第 2 項: ____________ (當 n = 2) 公差 d : 第 2 項 -第 1 項 = __________ 第 13 項: ____________ (當 n = 13) 首 13 項之和: $\mathrm{S(n)} = \dfrac{(a+l)\times \mathrm{n}}{2}$ ANS: 455

7.	一等差數列的第 n 項為 $3n-1$。求該數列的首 15 項之和。 ANS: 345
8.	設 a_n 為一等差數列的第 n 項。若 $a_2 = a_1 + 3$ 及 $a_1 + a_2 + \ldots + a_{25} = 1000$，求 a_1。 **解** 公差 d = a_2-a_1 = 3 第 1 項: a_1 第 25 項: a_1+ (25 – 1)3 = a_1+72 　 T(n) = a + (n - 1) d ***已知 $a_1 + a_2 + \ldots + a_{25} = 1000$, S(25)=1000*** $\mathrm{S}(25) = \frac{(\mathrm{a1} + \mathrm{a1} + 72) \times 25}{2} = 1000$ 　 $\mathrm{S(n)} = \frac{(a + l) \times \mathrm{n}}{2}$ ANS: 4
9.	設 a_n 為一等差數列的第 n 項。若 $a_2 = a_1 - 5$ 及 $a_1 + a_2 + \ldots + a_{32} = -2128$，求 a_1。 ANS: 11

例	某等差數列的第 2 項及第 5 項分別是 12 及 42。求該數列首 4 項之和。 **解** 設首項是 a，公差是 d。 $T(2) = 12$ $a + (2-1)d = 12$ T(n) = a + (n - 1) d $a + d = 12$ .... **(1)** $T(5) = 42$ $a + (5-1)d = 42$ T(n) = a + (n - 1) d $a + 4d = 42$ .... **(2)** (2) – (1)： $3d = 30$ $d = 10$ 把 $d = 10$ 代入 (1)。 $a + 10 = 12$ $a = 2$ $\therefore\ S(4) = \frac{4}{2}[2(2) + (4-1)(10)]$ $= \underline{\underline{68}}$
10.	某等差數列的第 4 項及第 6 項分別是 17 及 23。求該數列首 6 項之和。

例	已知等差數列 16, 18, 20, ⋯。 (a) 求該數列首 10 項之和。 (b) 若該數列首 *k* 項之和是 184，求 *k* 的值。 **<u>解</u>** a) ANS: 250 b) 首項 a = 16 末項 l = T(k) = 16 + (k – 1)2 項數 n = k **已知 *k* 項之和是 184 => S(k)=184** $\mathrm{S(k)} = \frac{[16+16+(\mathrm{k}-1)2]\mathrm{k}}{2} = 184$ $\mathrm{S(n)} = \frac{(a+l)\times \mathrm{n}}{2}$ $(32+2\mathrm{k}-2)\mathrm{k} = 368$ $(30+2\mathrm{k})\mathrm{k} = 368$ $30\mathrm{k} + 2k^2 - 368 = 0$ $k^2 + 15k - 184 = 0$ $k = 8$ 或 -23（捨去）
11.	已知等差數列 64, 55, 46, ...。 **(a)** 求該數列首 13 項之和。 **(b)** 若該數列首 *k* 項之和是 –56，求 *k* 的值。

ANS: (a) 130 , (b) 16

例

若一等差數列的首 n 項之和為 n^2+3n，求該數列的第 4 項。

$S(4) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

$S(3) = a_1 + a_2 + a_3$

$S(4) - S(3) = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - (a_1 + a_2 + a_3)$

$= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_1 - a_2 - a_3$

$= a_4$

第 4 項: $S(4) - S(3)$

$= (4^2+3x4) - (3^2-3x3)$

$= 10$

12. 若一等差數列的首 n 項之和為 $5n - n^2$，求該數列的第 7 項。

ANS: -8

例	已知等差數列 1, 8, 15, ...。 **(a)** 求該數列首 10 項之和。 **(b)** 求該數列的第 11 項至第 18 項之和。 **<u>解</u>** (a) 首項 = 1 公差 = 8 − 1 = 7 $S(10) = \frac{10}{2}[2(1) + (10-1)(7)]$ $\quad$ $S(n) = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ $= \underline{\underline{325}}$ (b) $S(18) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{16} + a_{17} + a_{18}$ $S(10) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}$ *** $S(18) - S(10) = \boldsymbol{a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16} + a_{17} + a_{18}}$ 第 11 項至第 18 項之和: $\boldsymbol{a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16} + a_{17} + a_{18}}$ $= S(18) - S(10)$ = ANS: 764
13.	已知等差數列 −2, 6, 14, ...。 **(a)** 求該數列首 5 項之和。 **(b)** 求該數列的第 6 項至第 10 項之和。 ANS: (a) 70 , (b) 280

例***	對任意正整數 n，設 $A(n)=2n+3$ 及 $B(n)=10^{2n+3}$。 **(a)** 以 n 表 $A(1)+A(2)+\ldots+A(n)$。 **(b)** 求 $\log(B(1)B(2)\ldots B(10))$。 **<u>解</u>** (a) 首項 A(1) = 2x1+3 = 5　　當 n=1 末項 A(n) = 2n+3 $\mathrm{A}(1)+\mathrm{A}(2)+\ldots+\mathrm{A}(\mathrm{n})=\frac{(5+2n+3)n}{2}$　　$\mathrm{S}(\mathrm{n})=\frac{(a+l)\times \mathrm{n}}{2}$ $=\frac{(2n+8)n}{2}$ $=\frac{2n^2+8n}{2}$ $=n^2+4n$ (b) B(1)B(2)…B(10) = 10^{2x1+3} x 10^{2x2+3} x 10^{2x3+3} x … x 10^{2x10+3}　　$X^M \cdot X^N = X^{M+N}$ = $10^{2x1+3 + 2x2+3 + 2x3+3 + \ldots + 2x10+3}$ log (B(1)B(2)…B(10)) = log(10^{2x1+3} x 10^{2x2+3} x 10^{2x3+3} x … x 10^{2x10+3}) =log ($10^{2x1+3 + 2x2+3 + 2x3+3 + \ldots + 2x10+3}$)　　log 10^k = k log 10 =k　**(log10=1) = 2x1+3 + 2x2+3 + 2x3+3 + … +2x10+3 = $\mathrm{A}(1)+\mathrm{A}(2)+\ldots+\mathrm{A}(10)$ = 10^2 +4x10 = 140
14	對任意正整數 n，設 $A(n)=4n-3$ 及 $B(n)=2^{4n-3}$。 **(a)** 以 n 表 $A(1)+A(2)+\ldots+A(n)$。 **(b)** 求 $\log_2(B(1)B(2)\ldots B(15))$。 ANS:645